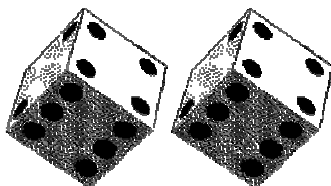


ARTIGO PUBLICADO NA REVISTA DO GEPEM –  
VOLUMES 51 e 52.

A Porta dos Desesperados  
(ou o problema de Monty Hall)

Ilydio Pereira de Sá<sup>1</sup>  
Vinícius Gusmão Pereira de Sá<sup>2</sup>



PARTE 1

Hoje, leitor, você é o feliz participante de um programa de TV. Daqueles de prêmios, como os de Gilberto Barros, Gugu Liberato e Sílvio Santos. No programa, há uma brincadeira do tipo “Porta dos Desesperados”. Trata-se de um jogo aparentemente simples: existem três portas iguais, uma das quais escondendo a chave de um carro zero. As duas outras portas ou nada contêm ou guardam um “monstro”, um bode ou coisa que o valha – para lhe “encher a paciência”, como é de praxe nesses programas. Seu objetivo é escolher a porta que tem o carro. Se falhar, voltará para casa a pé, consolado apenas pela oportunidade única de assistir às fanfarronadas saltitantes de um monstro de auditório.

Você se concentra, pedindo talvez algum sopro de inspiração divina, e faz sua escolha. Antes de desvendar o conteúdo da porta escolhida por você, o apresentador – que, evidentemente, conhece a localização do prêmio – abre uma das duas outras portas, mostrando-lhe não haver dentro dela prêmio algum (no máximo, um monstro, que vai embora correndo). Pergunta-lhe, então, se você gostaria de *trocar* a porta que inicialmente escolheu pela *outra* porta que permanece fechada. Suspense no ar.

A questão, portanto, é: vale a pena trocar de porta? Em outras palavras: após a interferência do apresentador, é mais provável que o prêmio esteja na sua porta, na outra, ou em qualquer uma delas indiferentemente? É isso que você se pergunta, num esforço supremo para raciocinar com aquela música de filme de Hitchcock que sai dos auto-falantes.

---

<sup>1</sup> Mestre em Educação Matemática, professor da UERJ, da Universidade Severino Sombra e do Colégio Pedro II – ilydio@gmail.com.

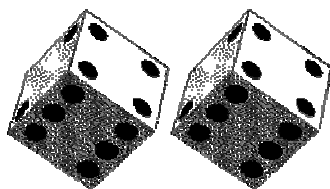
<sup>2</sup> Doutor em Algoritmos e Combinatória pela COPPE-UFRJ – vigusmao@uol.com.br.

Este pequeno problema, que não é tão simples quanto possa parecer, tornou-se famoso na década de 70, nos Estados Unidos, como o “problema de Monty Hall”, em referência ao apresentador de um programa televisivo (*Let's make a deal?*) que expunha os participantes a situações semelhantes à que descrevemos.

No Brasil, não é raro vemos versões do problema gerando polêmica em descontraídas rodas de amigos ou até mesmo em comunidades virtuais de matemática (*Orkut* e similares). Já presenciamos discussões acaloradas – leia-se verdadeiras guerras, repletas de fogos-de-artifício de cálculo e retórica – envolvendo os mais diferentes tipos: curiosos tenazes, alunos brilhantes e leigos insistentes, incluindo alguns professores de matemática pouco perspicazes ou pouco versados em probabilidades.

Para colocar mais lenha na fogueira, propomos, também aqui, o famoso problema (no próximo volume, apresentaremos a resposta correta):

Você troca de porta ou mantém sua escolha inicial?



## PARTE 2

No número anterior da revista do GEPEM, propusemos o famoso “problema de Monty Hall”.

Trata-se de um programa de auditório onde há três portas iguais, uma das quais escondendo um prêmio. Você precisa escolher a porta com o prêmio ou nada ganha. Diz o problema que, após você ter escolhido uma porta e antes de ser revelado seu conteúdo, o apresentador abre, como de costume, uma das duas outras portas, mostrando-lhe que o prêmio não se encontra ali. Você é, então, perguntado se deseja trocar sua porta inicial por aquela que permanece fechada. A questão é se a troca da porta aumentaria, diminuiria ou em nada alteraria sua chance de ganhar o prêmio escondido.

Acertou quem respondeu que, mudando de porta, é maior a probabilidade de se ganhar o prêmio. Aliás, como veremos a seguir, um pouco de conhecimento de cálculo de probabilidades mostra que mudar de porta, nessa situação, nos dá uma probabilidade *duas vezes maior* de ganhar o prêmio (em relação a manter a escolha inicial).

É claro que, se existem três portas (vamos chamá-las *A*, *B* e *C*) e você escolhe uma delas às cegas (*A*, por exemplo), a probabilidade de que você tenha colocado as mãos no prêmio é de  $1/3$ . Conseqüentemente, a chance de ter feito uma escolha inicial errada é igual a  $2/3$ .

Entendido esse ponto, precisamos ter em mente que o apresentador do programa, ao abrir *propositalmente uma porta vazia* (digamos,  $B$ ), está lhe dando uma valiosa informação: “se é o caso em que o prêmio está em uma das portas que você não escolheu ( $B$  ou  $C$ ), saiba que ele está exatamente na porta que eu não quis – ou não pude – abrir (ou seja,  $C$ ).”

Isso significa que, se você escolheu inicialmente uma das portas sem prêmio (e a chance disso ocorrer é de  $2/3$ ), irá necessariamente ganhar o prêmio ao trocar pela porta ainda não aberta. A chance de você ganhar não trocando de porta é, portanto, igual ao mesmo  $1/3$  inicial.

Uma maneira de se “intuir” a corretude desse resultado é: faça a brincadeira um número muito grande de vezes e *nunca* troque de porta após o apresentador lhe ter revelado uma porta vazia (coisa que ele *sempre* fará). Você terá localizado e ganhado o prêmio em aproximadamente um terço das vezes. Se tivesse trocado de porta sempre, teria ganhado o prêmio, evidentemente, em dois terços das vezes.

Ainda outra maneira “intuitiva” é imaginar que há 1000 portas numeradas na brincadeira, apenas uma contendo um prêmio. Você escolhe uma delas, após o que o apresentador revela 998 portas vazias, perguntando-lhe se deseja manter sua porta inicial ou trocar por aquela, de número 355, que ele manteve fechada. Convenhamos...

No entanto, a maioria das pessoas tende a pensar que tanto faz ficar com a porta inicial ou mudar para a outra, com 50% de chance para cada uma. Isto revela uma avaliação incorreta da informação que vem à tona com a interferência do apresentador *que só pode escolher uma porta vazia para abrir* (sem estragar a brincadeira). A informação adquirida *não é* simplesmente “a porta  $B$  não tem prêmio”; é, na verdade, “o apresentador *não abriu* a porta  $C$ ”.

Esse problema – também conhecido como “paradoxo”, apenas por sua aparente contra-intuitividade – é usado em diversos cursos e livros de estatística e probabilidade e tem circulado pelos meios acadêmicos e pela Internet. A solução que apresentamos é bem simples e busca tentar corrigir a intuição do leitor que eventualmente tivesse respondido equivocadamente. O problema pode, no entanto, ser resolvido formalmente através de probabilidades condicionais. Sejam os seguintes eventos:

$P_A$ : o prêmio está em  $A$

$P_B$ : o prêmio está em  $B$

$P_C$ : o prêmio está em  $C$

$R_A$ : o apresentador revela o conteúdo (vazio) de  $A$

$R_B$ : o apresentador revela o conteúdo (vazio) de  $B$

$R_C$ : o apresentador revela o conteúdo (vazio) de  $C$

Se mantivermos o rótulo  $A$  para a porta que você escolhe inicialmente e  $B$  para a porta vazia aberta pelo apresentador, estamos interessados em  $\Pr[P_A | R_B]$ .

Pela “Regra de Bayes”, temos

$$\begin{aligned}
\Pr[P_A | R_B] &= \{ \Pr[R_B | P_A] \cdot \Pr[P_A] \} / \\
&\quad \{ \Pr[R_B | P_A] \cdot \Pr[P_A] + \Pr[R_B | P_B] \cdot \Pr[P_B] + \Pr[R_B | P_C] \cdot \Pr[P_C] \} = \\
&= \{ (1/2) \cdot (1/3) \} / \\
&\quad \{ (1/2) \cdot (1/3) + 0 \cdot (1/3) + 1 \cdot (1/3) \} = \\
&= 1/3.
\end{aligned}$$

Como  $\Pr[P_A | R_B] + \Pr[P_B | R_B] + \Pr[P_C | R_B] = 1$  e  $\Pr[P_B | R_B] = 0$ , concluímos facilmente que

$$\Pr[P_C | R_B] = 1 - \Pr[P_A | R_B] = 1 - 1/3 = 2/3.$$

Já que nos valem de sua famosa expressão, fechamos este artigo lembrando que o reverendo Thomaz Bayes foi um dos primeiros a escrever sobre o pensamento matemático na tomada de decisões. Em estudo publicado em 1763, lembra-nos que um dos principais componentes do processo decisório é interpretar corretamente as informações disponíveis e lidar com as incertezas, determinando as probabilidades associadas aos possíveis desfechos a partir de uma ou outra decisão tomada.

O bom uso das probabilidades condicionais é, portanto, uma ferramenta essencial em nossas vidas – e ainda que de forma intuitiva, não necessariamente calculada em números exatos. Neste momento, por exemplo, o leitor ficaria muito surpreso se passasse diante de si uma pessoa vestida de caveira ou de Hércules. No entanto, se ouvisse ao fundo uma música de Carnaval, a probabilidade de que visse alguém fantasiado dessa forma seria muito maior.