UNIFESO – CURSO DE MATEMÁTICA

NÚCLEO DE ATIVIDADES INTEGRADAS (NAI)

PROF. ILYDIO PEREIRA DE SÁ

USANDO A REGRA DA FALSA POSIÇÃO PARA RESOLVER EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Introdução:

É bastante comum encontrarmos nos livros didáticos do ensino médio equações exponenciais simples, do tipo $2^x = 256$. É claro que a solução é quase imediata, pois o número 256 é uma potência de base 2 (2^8) e isso nos leva ao resultado $x = 8$.

Mas será que as equações exponenciais que encontramos no cotidiano (e elas são mais comuns do que se possa achar) são tão simples como essas que encontramos nos livros? Como resolveríamos uma equação do tipo $2^x = 11$? É claro também que as pessoas com algum conhecimento matemático dirão – basta aplicar logaritmos! – e a resposta está corretíssima. Mas como podemos resolver essa equação, de forma aproximada, numa classe de ensino fundamental? Como podemos resolver usando apenas a potenciação de números naturais e o conhecimento da regra da falsa posição? É o que pretendemos mostrar ao longo desse estudo.

A Regra da dupla falsa posição

Dada uma função real, de variável real, $y = f(x)$, não linear, a obtenção do resultado aproximado da equação $f(x) = c$, por interpolação linear, é feita usando-se dois valores falsos, x_1 e x_2 de forma que os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ sejam tais que:

$f(x_1) < c < f(x_2)$ ou $f(x_1) > c > f(x_2)$. Assim sendo, poderemos calcular o valor aproximado de x, usando a proporção:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{c - f(x_1)}{x - x_1}$$

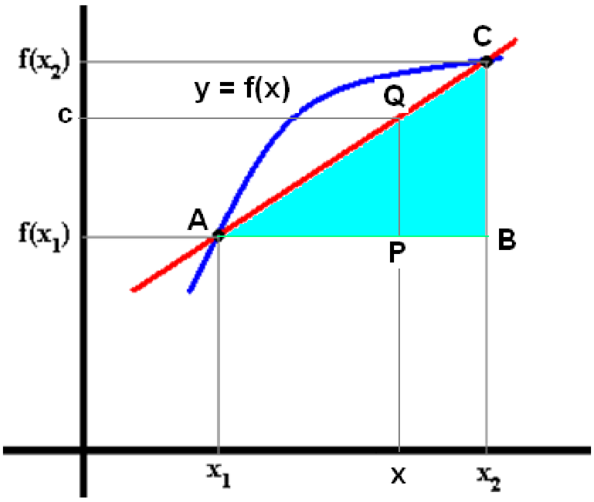
A demonstração:

Supondo o gráfico representativo da função $y = f(x)$, o que fizemos foi aproximá-lo por uma reta. Lembramos que, sem as notações usuais e sem qualquer demonstração matemática, os antigos babilônios e egípcios já usavam a regra da falsa posição há mais de 1500 anos antes de Cristo, conforme registros em papiros antigos, como o Papiro de Rhind.

Vejamos a demonstração:

Trata-se de um simples caso de semelhança de triângulos. Observe na figura abaixo que os triângulos ABC e APQ são semelhantes (Teorema de Tales). Logo, teremos:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{c - f(x_1)}{x - x_1}$$



Aplicações

1) Qual a solução aproximada, pela interpolação linear, da equação $2^x = 11$ que aparece na introdução desse estudo?

   SOLUÇÃO:

Temos que encontrar dois valores adequados de x cujas potências de 2 estejam próximas de 11. Temos que $2^3 = 8$ e $2^4 = 16$. Logo, o valor de x procurado é tal que $3 < x < 4$. Aplicando a regra da falsa posição, usando $x_1 = 3$; $x_2 = 4$; $f(x_1) = 8$ e $f(x_2) = 16$, teremos:

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{c - f(x_1)}{x - x_1}$ ou $\frac{16 - 8}{4 - 3} = \frac{11 - 8}{x - 3}$ ou $\frac{8}{1} = \frac{3}{x - 3}$

$8 \cdot (x - 3) = 3$ ou $8x - 24 = 3$ ou $8x = 27$

$x = 27 : 8 =$ **3,375**

Conclusão: A solução aproximada da equação $2^x = 11$, pela interpolação linear é **x = 3, 375**.

Se aplicarmos os modernos logaritmos, encontraremos a solução x = 3,459. É claro que, como se trata de crescimento exponencial ainda encontramos um erro relativo de 2,4%, aproximadamente. Os antigos babilônios, visando melhorar a aproximação, aplicavam a técnica da interpolação várias vezes seguidas, usando como x_2 o valor obtido na interpolação anterior.

2) Qual o tempo aproximado para que um capital qualquer duplique de valor, aplicado a juros compostos de 1% ao mês?

SOLUÇÃO:

Se um capital qualquer C, vai duplicar após um tempo t (meses), o nosso problema recai na equação exponencial $C\ .\ (1{,}01)^t = 2C$ ou ainda

$1{,}01^t = 2$ (lembre que, se um valor aumenta de 1%, ele fica multiplicado pelo fator 1,01).

É claro que, nesse caso, os alunos teriam de usar uma calculadora simples e através de tentativas, descobrirem que os valores falsos a serem usados seriam $x_1 = 69$ e $x_2 = 70$, pois $1{,}01^{69} \cong 1{,}98689$ e $1{,}01^{70} \cong 2{,}00676$. Aplicando a interpolação linear, teremos:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{c - f(x_1)}{x - x_1} \text{ ou } \frac{2{,}00676 - 1{,}98689}{70-69} = \frac{2 - 1{,}98689}{x-69} \text{ ou } \frac{0{,}01987}{1} = \frac{0{,}01311}{x-69}$$

$0{,}01987\ .\ (x - 69) = 0{,}01311$

$0{,}01987\, x - 1{,}37103 = 0{,}01311$

$0{,}01987\, x = 1{,}38414$

$x = 1{,}38414 : 0{,}01987 \cong$ **69,66 meses ou 5 anos 9 meses 19 dias**

Nesse caso, usando logaritmos, encontraríamos a resposta aproximada **x = 69,66 meses.** Como os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são bastante próximos, o erro obtido foi bem pequeno e só apareceria após a terceira casa decimal, ou seja, erro inferior a 1 milésimo.