UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS FUNÇÕES MATEMÁTICAS.

PROF. ILYDIO PEREIRA DE SÁ

I) CRIPTOGRAFIA E FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Um dos problemas encarados como um passatempo até poucos anos atrás, e que se tornou de importância crucial atualmente, é o de transmitir mensagens codificadas ou, em termos técnicos, criptografar mensagens. Quem já leu o livro "O Código Da Vinci" com certeza já se deparou com códigos criptografados. Este problema, bem atual, surge e revela toda a sua importância quando é necessário enviar por meio de uma rede de computadores dados sigilosos: saldos e senhas bancárias, informações pessoais, número de cartão de crédito, etc. É preciso criar, então, meios seguros de transmitir esses dados de modo que somente pessoas autorizadas tenham acesso a eles.

O primeiro passo para que seja criado um código seguro é estabelecer, de alguma maneira pré-determinada, uma correspondência entre letras e números. Vamos usar esse exemplo para que você tenha uma noção inicial sobre um importante conceito matemático – **as funções.**

Existem muitas formas de se definir tal correspondência, a mais simples das quais é dada pela tabela abaixo:

Letras	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*x*	*z*
Números	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*

Essa tabela define uma correspondência que associa a cada letra do nosso alfabeto, um único número natural entre 1 e 23.

- Por essa correspondência, qual letra está associada ao número 15?
- Qual o número correspondente à letra *x* ?
- Você é capaz de estabelecer uma correspondência que associe as letras do alfabeto aos números naturais diferente dessa?

Nesse exemplo, o problema de transmitir mensagens codificadas foi reduzido, simplesmente, ao problema de associar a cada letra do alfabeto um único número natural, de acordo com uma regra conhecida. A correspondência ou regra, estabelecida acima, define uma função matemática.

Uma função matemática é, em essência, uma forma especial de se fazer uma correspondência entre elementos de dois conjuntos.

É claro que, para transmissão de mensagens, não se pode usar um código tão simples assim. O sigilo dos dados não estaria garantido, porque seria muito fácil descobrir a chave do código e então, decodificar a mensagem. Por isso, em geral, depois dessa primeira etapa, em que se faz corresponder letras a números de maneira simples, os números obtidos são ainda operados algebricamente usando-se regras conhecidas somente pelo receptor e pelo transmissor da mensagem.

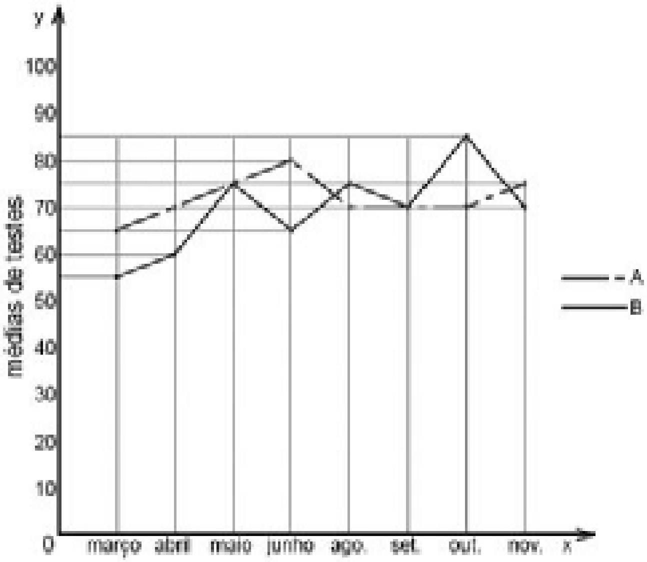
Suponha que ao número obtido, usando-se a tabela anterior, seja somado 4 unidades e o resultado multiplicado por 3.

- Após esta segunda etapa qual seria o novo número associado a letra *x* ?
- Qual letra corresponderia ao número 42?
- Se *y* representa uma letra qualquer do nosso alfabeto, a qual está associada, pela primeira parte deste código, o número *w*, entre 1 e 23, qual seria o valor final associado a *y*, após a aplicação das duas etapas do código descrito acima?
- Use este código para "transmitir" a palavra mar.

Objetivo:
Para responder as perguntas propostas no exemplo anterior, é preciso encontrar uma relação entre as **variáveis** envolvidas no problema, naquele caso, letras do alfabeto e números naturais. A matemática, no curso de Administração de Empresas, tem como preocupação maior o estudo das correspondências que relacionam as diversas **variáveis** que aparecem num problema. Mais especificamente, ao estudo das **funções e seus gráficos**.

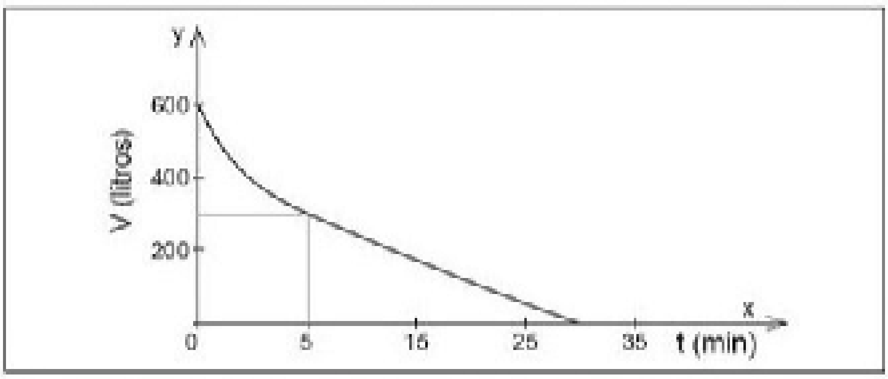
II) Questões iniciais, para análise e discussão:

Questão 1:
O gráfico abaixo nos mostra o perfil de desempenho de duas turmas, A e B, no ano de 2005, em Matemática.



a) Qual a média da turma A em junho de 2005? E da turma B?
b) Em que meses a turma A teve média mais alta que a turma B?
c) Qual a média máxima e a mínima de cada uma das turmas? Em que meses ocorreram?
d) Em que períodos o desempenho da turma A foi crescente? Em que período foi decrescente? Quando se manteve constante?
e) A turma B teve desempenho constante em algum período?
f) Qual das duas turmas apresentou um desempenho mais equilibrado?

Questão 2:
Um depósito, contendo inicialmente 600 litros de água, dispões de uma válvula na sua parte superior. Um dispositivo foi utilizado para registrar o volume de água no reservatório, a cada instante, a partir do momento em que a válvula foi aberta. Os valores obtidos durante a operação permitiram construir o gráfico do volume em função do tempo (FUVEST – SP)



a) Quantos minutos decorreram até o volume da água existente no depósito cair à metade?

b) Em quanto tempo o depósito fica vazio?

Questão 3:

Vamos supor que os taxímetros cobrem R$ 3,50 de bandeirada inicial e mais um valor de R$ 0,50 por quilômetro rodado. Responda ao que se pede:

a) Quanto custará uma viagem de 3 km?

b) E uma viagem de 6 km?

c) Qual o valor que seria cobrado por uma viagem menor do que 1 km ?

d) Qual a expressão matemática que representa o custo da viagem ©, em função dos quilômetros percorridos (k)

e) Como você representaria, graficamente, essa relação entre as variáveis C e k ?

III) O Conceito de Função

Encontramos o uso de função nos mais variados assuntos. Por exemplo, o preço a ser pago numa conta de luz depende da quantidade de energia consumida, para cada quantidade de energia temos um preço definido. Na tabela de preços de uma loja, a cada produto corresponde um determinado preço.

Para resolver problemas análogos aos propostos nos exemplos anteriores, precisamos sempre deduzir uma lei ou fórmula matemática que determine, precisamente, a relação entre as variáveis envolvidas em cada caso. Essa lei ou correspondência é o que chamamos, em matemática de **função**. Resumindo:

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Uma função f definida em A, assumindo valores em B, é uma regra ou lei de correspondência que associa a cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B .

Em particular, se os conjuntos ***A*** e ***B*** forem conjuntos de números reais, a cada número real ***x*** de ***A*** , deve corresponder, pela ***f,*** um único número real ***y*** em ***B*** .

O conjunto ***A*** dos valores permitidos para *x* chama-se **domínio da função** e o conjunto dos valores correspondentes de *y* chama-se **imagem da função.** O conjunto imagem, portanto, é um subconjunto de ***B* .** O conjunto ***B*** é denominado **contradomínio** de ***f* .**

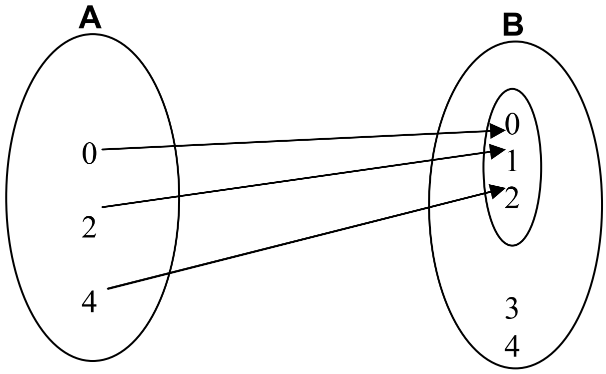
Costuma-se chamar *x* de variável independente, porque ela é livre para assumir qualquer valor do domínio e chamar *y* de variável dependente, porque seu valor depende da escolha de *x*.

Observe que, na definição de função, exigimos que a cada elemento do domínio, seja associado ***um único*** (um e apenas um) elemento da imagem.

Uma função pode sempre ser representada graficamente ou por uma sentença (como vimos nos exemplos anteriores) que relacione as duas variáveis envolvidas. A sentença que representa uma função costuma ser simbolizada por y = f(x).

<u>Exemplo:</u>

Considere os conjuntos A={0, 2, 4} e B={0, 1, 2, 3, 4} e a função *f: A → B*, definida pela lei *f(x)* = $\frac{x}{2}$
Apresentando *f* por um diagrama de flechas, temos:



Então, para uma função *f* de A em B, definimos:

- **<u>Domínio:</u>** É o conjunto de todos os elementos pertencentes ao conjunto A. Indicamos esse conjunto por *D(f)*. No exemplo, *D(f) = A*.

- **<u>Contradomínio:</u>** É o conjunto de todos os elementos pertencentes ao conjunto B. Indicamos esse conjunto por *CD(f)*. No exemplo *CD(f) = B*.

- **<u>Imagem:</u>** É o conjunto formado pelos elementos de B que estão associados aos elementos de A, de acordo com a lei dada. Indicamos esse conjunto por *Im(f)*. No exemplo, *Im(f) = {0, 1, 2}*. Observemos que *Im(f)* é um subconjunto de *CD(f)*, isto é, $Im(f) \subset CD(f)$.

Indicamos uma função *f* de A em B por *f: A→ B* (que se lê: *"f é função de A em B"*) ou *f: x→ y* (que se lê: *"f é função de x em y"*).

Como *x* e *y* têm seus valores variando nos conjuntos A e B, estes recebem os nomes de variáveis. Uma função *f* fica definida quando são dados seu domínio, seu contradomínio e a lei de associação *y = f(x).*

Toda vez que uma função ***f*** for dada apenas por uma sentença matemática y = *f(x)* fica subentendido que a função está definida de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$, ou seja, o seu domínio é subconjunto de $\mathcal{R}$ (conjunto dos números reais) e o seu contradomínio também.

IV) Um pouco de história

Em termos intuitivos, uma função é uma regra ou lei que nos diz como duas ou mais quantidades variam entre si.

Já no século XIII, os filósofos medievais - que seguiam a escola de Aristóteles - discutiam a quantificação de formas variáveis. Entre tais formas, eles estudavam a velocidade de objetos móveis e a variação da temperatura de ponto para ponto de um sólido aquecido.

No século XIV, Oresme - teólogo e matemático francês - tem a brilhante idéia de traçar uma figura ou gráfico das grandezas que variam. Esta foi, talvez, a primeira sugestão do que hoje é chamado de representação gráfica de uma função.

Em particular, Descartes verificou que uma relação algébrica do segundo grau tinha como imagem gráfica uma curva cônica, isto é, uma elipse, uma hipérbole, uma parábola ou uma circunferência. A Descartes devemos os gráficos mais usados na matemática, que usam dois eixos perpendiculares para representar as variáveis do problema – são os gráficos Cartesianos.

Fermat também estudou as cônicas e estabeleceu que as retas são as curvas descritas por meio de uma relação algébrica de primeiro grau.

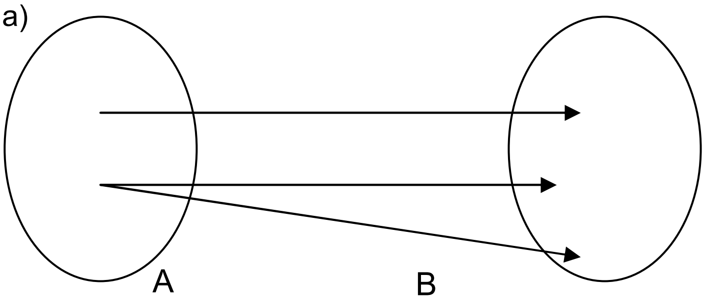
O estudo desses dois gênios contribuíram, significativamente, para estabelecer os fundamentos que permitiram, mais tarde, o desenvolvimento da teoria do Cálculo Diferencial e Integral, por Newton e Leibniz.

Exercícios:

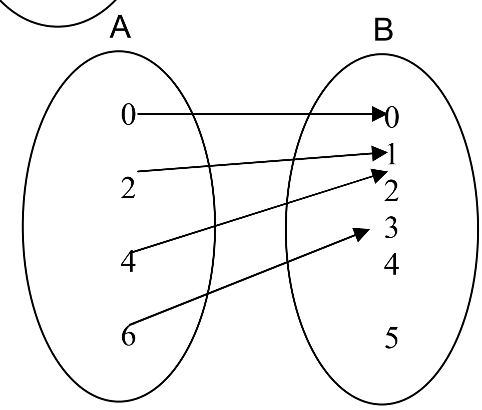
1) Considere os conjuntos A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 5, 10, 12}. Represente através de um diagrama e através de um gráfico cartesiano, a função definida por $y = f(x) = x^2 + 1$. Qual o domínio e o conjunto imagem dessa função?

2) Os diagramas representados abaixo representam ou não uma função? Justifique a sua resposta.

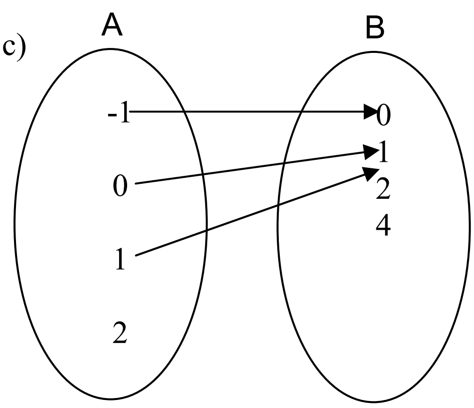
a)



b)



c)



V) Construção de gráficos

Para construir um gráfico cartesiano de uma função *f*, basta atribuir valores do domínio à variável **x** e, usando a sentença matemática que define a função, calcular os correspondentes valores da variável **y**.

Os passos para construção de um gráfico de uma função são:

FÓRMULA ⇨ TABELA ⇨ MARCAR OS PONTOS ⇨ LIGAR OS PONTOS (SE FOR O CASO)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Represente graficamente as funções definidas de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$:

a) $y = 2x$

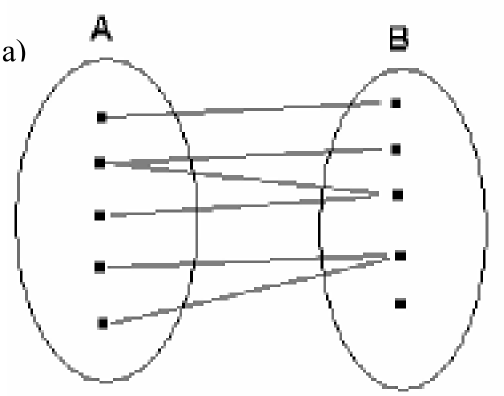
b) $y = 3$

c) $y = x^2 - 1$

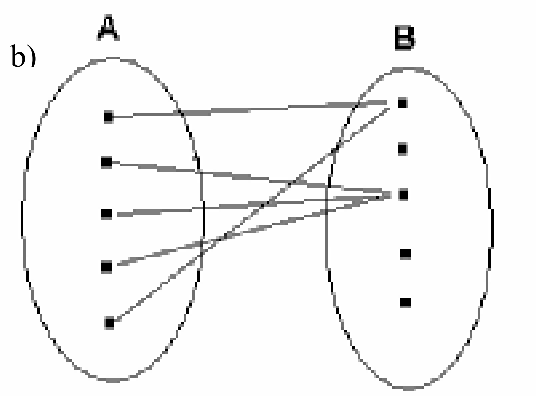
2) Considere os conjuntos A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 5, 10, 12}. Represente através de um diagrama e através de um gráfico cartesiano, a função definida por $y = f(x) = x^2 + 1$. Qual o domínio e o conjunto imagem dessa função? Qual a solução da equação f(x) = 10? E da equação f(x) = 12? Qual o valor de f(4)?

3) Os diagramas representados abaixo representam ou não uma função f: A → B? Justifique a sua resposta. Quais deles seriam funções g: B → A?

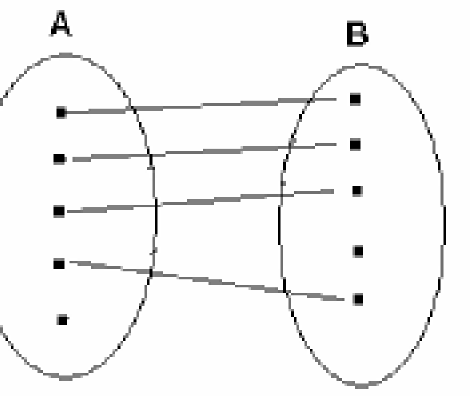
a)



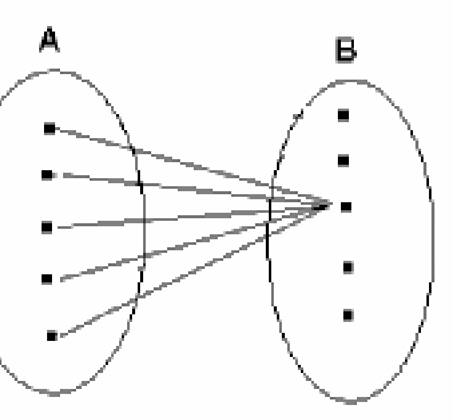
b)



c)

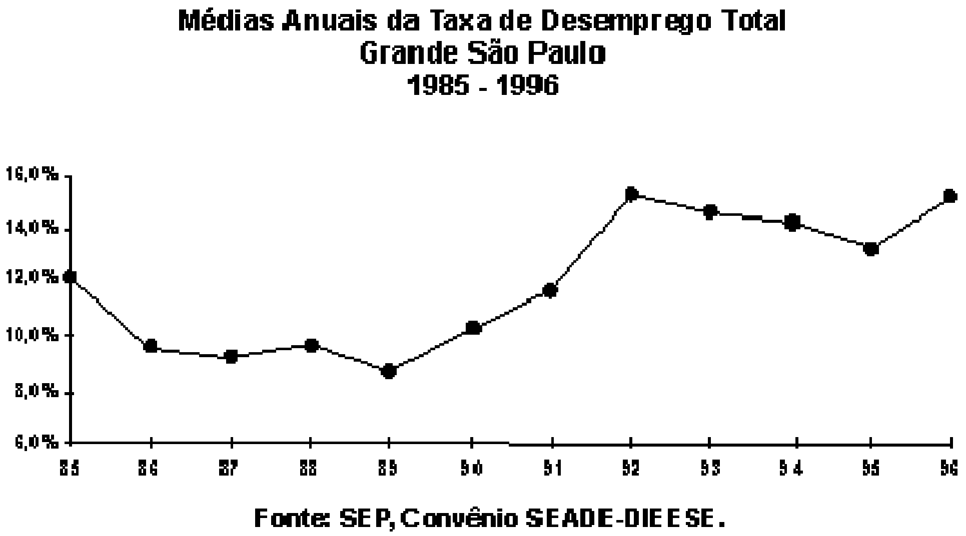


d)



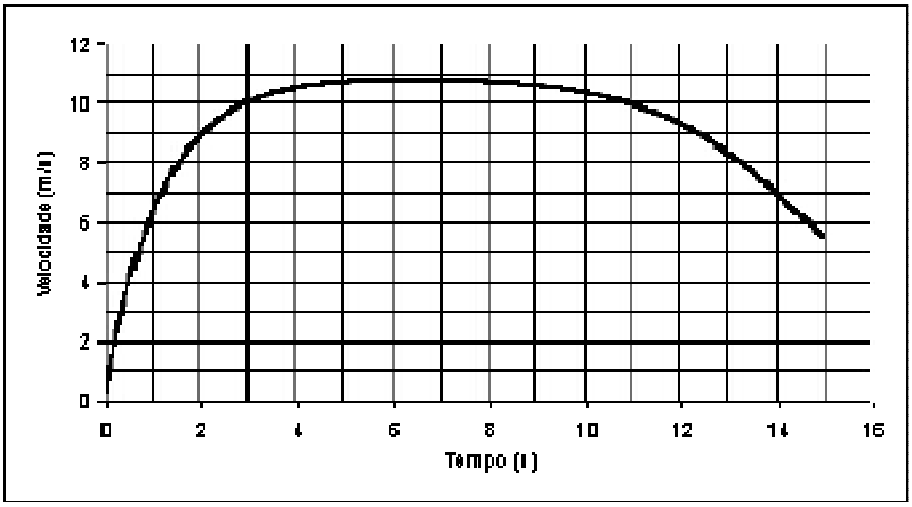
4) Considere uma função f, definida por: f $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f (x) = $2^x + 2$. Obtenha:
a) o valor de f(0) b) o valor de f(1) c) o valor de f(2)
d) o valor de f(-1) e) o valor de x para que se tenha f(x) = 10

5) Um estudo sobre o problema do desemprego na Grande São Paulo, no período 1985-1996, realizado pelo SEADE-DIEESE, apresentou o seguinte gráfico sobre taxa de desemprego:



Pela análise do gráfico, é correto afirmar que , no período considerado:
a) a maior taxa de desemprego foi de 14 %
b) a taxa de desemprego no ano de 1995 foi a menor do período
c) a partir de 1992, a taxa de desemprego foi decrescente
d) no período 1985-1996, a taxa de desemprego esteve entre 8 % e 16 %

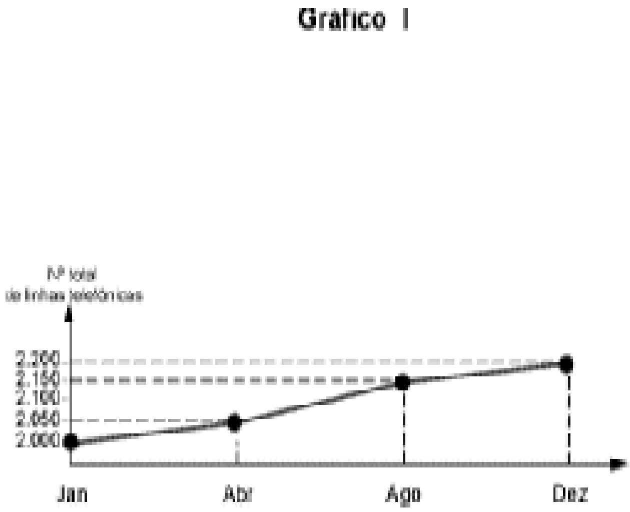
6) Em uma prova de 100 metros rasos, o desempenho típico de um corredor padrão é representado pelo gráfico a seguir:

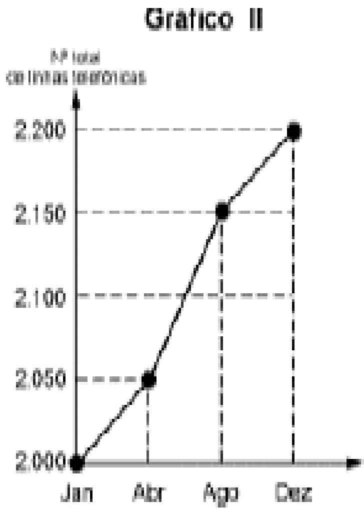


Baseado no gráfico, em que intervalo de tempo a velocidade do corredor é aproximadamente constante?

a) entre 0 e 1 segundos b) entre 1 e 5 segundos
c) entre 5 e 8 segundos d) entre 8 e 11 segundos

7) Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, abaixo representado. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, onde pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas.

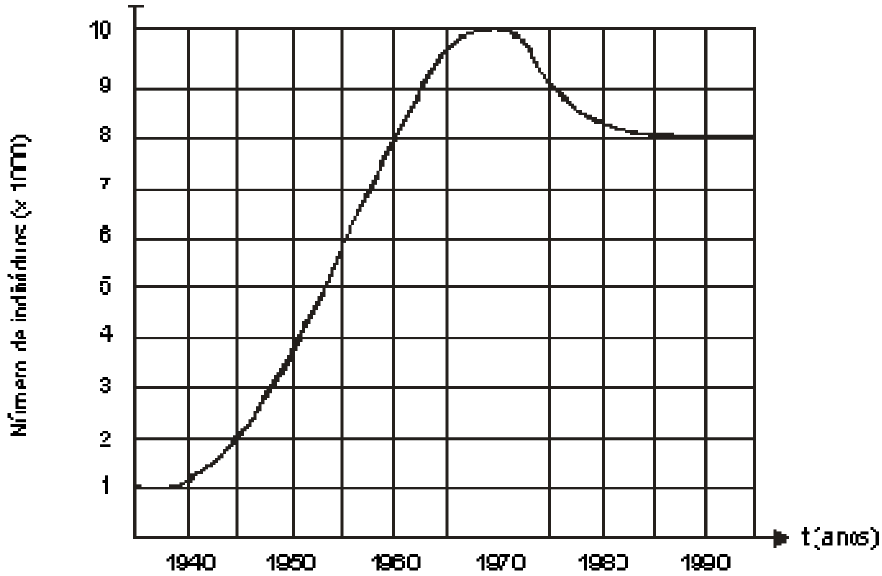




Analisando os gráficos, pode-se concluir que:

a) o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I
b) o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto
c) o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto
d) a aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas

8) O número de indivíduos de certa população é representado pelo gráfico abaixo.



Em 1975, a população tinha um tamanho aproximadamente igual ao de:
a) 1960 b) 1963 c) 1967 d) 1970

9) Dada a função f: IR→ IR definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3, & \text{se } x \leq 3 \\ 3x-2, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Determinar: f(0), f(-4), f(2) e f(3) e f(10).

10) Dada a função f: IR→ IR definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2, & \text{se } x \leq 3 \\ 2^x+1, & \text{se } 3 < x < 5 \\ \sqrt{x+3}, & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Determinar: f(0), f(3), f(4), f(5), f(6)